

REFLEXÕES A CERCA DA VOLATILIDADE E DOS DERIVATIVOS

SUMMARY

The objective of this article is to form a theoretical reference which, when combined with a computational process, will permit a numerical handling of the Black and Scholes equation. This theoretical mark will facilitate the measurement of the implied volatility with sufficient precision to allow Delta to be significant. Where Delta is the probability of execution of an asset. Given the initial result, the second desired objective is to use the prior knowledge to build a posteriori probability distribution based on the Bayesian type of inference. Furthermore, this mark can be used to stimulate a correction in the Black and Scholes Model. Once we reach these two objectives, we will have a model which is resilient and has a good foundation to manipulate financial strategies. Even though financial strategies are common in capital markets, with this procedure, they will have the possibility to maximize a desired profit level.

Key words: Black & Scholes, Bayesian Inference, Options, Volatility.

RESUMO

Este artigo tem por objetivo determinar um referencial teórico que possa ser combinado com um procedimento computacional que permita manipular numericamente a equação de Black & Scholes e estimar a volatilidade implícita com precisão suficiente para que se admita que Δ , que é a probabilidade de execução de um ativo, seja significativa. De posse desse primeiro resultado, o segundo objetivo desejado é utilizar esse conhecimento a priori para construir uma distribuição de probabilidades a posteriori, fundamentada pela Inferência Bayesiana, e propor uma correção probabilística para modelo de Black & Scholes. Cumpridos os dois objetivos, ter-se-á um modelo resiliente e bem fundamentado para operar estratégias financeiras. Tais estratégias, embora comuns ao mercado financeiro, terão agora a possibilidade de maximizar o lucro a ser atingido.

Palavras Chave: Black & Scholes, Inferência Bayesiana, Opções, Volatilidade.

INTRODUÇÃO

Segundo STEWART (2015), 17 equações mudaram o mundo. A primeira que ele relaciona é o Teorema de Pitágoras e a última é a equação de Black & Scholes. Muito se escreveu a respeito da primeira e muito se escreverá a respeito da segunda, cujo uso indevido inclusive já quebrou pelo menos um conhecido fundo de investimento. Mas investimentos e crises constituem parte importante da história da humanidade.

Observar a história pode ser uma forma pitoresca de prever o futuro ou para antever fatos que poderão acontecer com alguma probabilidade. Por exemplo, a crise das tulipas na Holanda do século XVII culminou, em 1637, com a perda de confiança no sistema financeiro vigente na época e levou à falência inúmeros negociantes na Europa. Muitas outras crises, motivadas por diversas razões, ocorreram desde então. Apenas para citar algumas: a quebra da bolsa em 1929, o aumento dos preços do petróleo e a reciclagem dos petrodólares em 1970, a crise da dívida dos países em desenvolvimento em 1981, a crise do peso mexicano em 1994, a crise financeira do leste asiático no final dos anos 1990, a Rússia e a América Latina em 1998, e assim sucessivamente. O fator perda de confiança, com maior ou menor intensidade, sempre esteve e sempre estará presente – é um fator invariante. Mais recentemente, já em 2007/2008, a crise do subprime americano se apresentou de modo bastante semelhante à crise que quebrou o mercado holandês; novamente afetando a confiança nos mercados e praticamente zerando as notas de rating de muitas instituições de financeiras no EUA e na Europa.

O quê aprendemos com essas crises tão distantes e tão semelhantes? Pouco ou muito pouco, apenas o suficiente para imaginarmos que outras estão por vir. Crises de confiança devem ser pertinentes ao REAL descrito por Lacan e temos dificuldade, como seres humanos, quando tentamos simbolizá-las. É provável que elas sempre estejam presentes na história da humanidade, mas isso não significa que o caminho do progresso seja a repetição dos erros ou a estagnação dos processos financeiros.

Tentativas de compreender, imaginar ou simbolizar crises podem vir de situações singulares, até paradoxais. Caminhando com certa parcimônia pela linha temporal da evolução financeira, aparece um biólogo um inglês no século XIX. Robert Brown observou o movimento dos grãos de pólen na água e nunca deve ter imaginado que, com um paralelo entre a variação estocástica no preço de um ativo e com o movimento observado por ele, pesquisadores modelariam os dos preços de ativos e de seus respectivos derivativos.

O resultado do trabalho de Brown? Em 1973 os pesquisadores americanos, Fischer Black e Miron Scholes (BLACK, 1973), obtiveram o reconhecimento por um artigo que apresentava um modelo de precificação para o prêmio de opções de compra e venda. Pouco tempo depois, em 1977, os pesquisadores Scholes e Merton (Fisher já havia falecido) recebem o Nobel de Economia pelo modelo que ficou conhecido como Modelo de Black & Scholes (MBS):

$$c = S \cdot N(d1) - Ke^{-rT} N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

onde,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

e

- c: Preço de uma opção CALL;
- r: juros livre de risco (SELIC);
- σ : volatilidade;
- K: preço de exercício;
- T: prazo de vencimento da opção;
- S: preço do ativo subjacente.

Muito também já se escreveu sobre o Movimento Browniano de Partículas e sobre a equação de Black & Scholes, não cabendo aqui uma revisão histórica ou teórica dos trabalhos realizados nessa linha de pesquisa. Entretanto dois artigos são fundamentais para a presente reflexão. Primeiro deve-se citar MANASTER (1982) que elaborou a semente que facilitou a aplicação do método de Newton-Raphson para calcular a volatilidade implícita de forma automatizada através de rotinas escritas, por exemplo, com a linguagem R. Também deve-se citar, logo em seguida, o trabalho de DUMAS (1998), que consiste em uma proposição para estimar a volatilidade implícita através de uma regressão linear múltipla utilizando parte das covariáveis existentes no Modelo de Black & Scholes. Resumidamente, os artigos Manaster e Dumas são complementares e

permitem, quando associados, manipular o MBS numericamente através de métodos computacionais, inferindo e explicando a formação dos preços nas cadeias de derivativos.

Este artigo, enfim, trabalha basicamente com as ideias e com as teorias dos dois pesquisadores citados no parágrafo anterior. A ideia inicial consiste em uma pequena crítica teórica ao modelo proposto por Dumas, na verdade na apresentação de um refinamento do modelo linear e, conseqüentemente, um aprimoramento da qualidade da estimativa da volatilidade implícita. A outra ideia, ainda que bem mais ambiciosa, é uma proposta bayesiana que permite uma correção probabilística no MBS.

SOBRE A VOLATILIDADE IMPLÍCITA

A proposta de Manaster e Dumas

Para compreender a proposta de Dumas é necessário manipular algebricamente as equações do MBS. Deve-se reparar que todas as covariáveis do modelo de Black & Scholes, com exceção da volatilidade implícita - σ_{real} -, são conhecidas e que podem ser facilmente obtidas no mercado de capitais. Então bastaria que se reescrevesse a equação

$$c = S \cdot N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)$$

isolando-se a única covariável realmente desconhecida, σ_{real} . Ou seja, bastaria determinar uma função tal que:

$$\sigma_{\text{real}} = f(c_t, r, K, T, S_t)$$

Infelizmente não existe uma solução analítica para a equação e o resultado deve ser aproximado, obtido numericamente. Lemgruber (1995) garante a unicidade da volatilidade implícita para o suporte dado pelas covariáveis do MBS e propõe um método bem intuitivo, quase artesanal, para o cálculo da mesma. Embora esses cálculos sejam realmente funcionais, é impraticável a utilização dessa metodologia quando é necessário realizar uma grande quantidade de operações financeiras num curto espaço de tempo, pois eles não podem ser automatizados facilmente. Todavia Haug (2006) e Natenberg (1994) mostram uma adaptação do algoritmo de Newton-Raphson que possui boas características computacionais:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} - \frac{c_{\sigma_{i-1}} - c_m}{K_{i-1}}$$

onde,

- σ_i : é a volatilidade implícita;
- $c_{\sigma_{i-1}}$: é o prêmio da opção call obtida no momento σ_{i-1}
- c_m : valor de mercado da opção de compra;
- K_{i-1} : é o “Vega” da opção de compra no momento (i-1).

Com o método de Newton-Raphson bem resolvido, Manaster calculou a semente do método, σ_1 , de modo que todo esforço computacional pode ser reduzido:

$$\sigma_1 = \sqrt{\left| \log\left(\frac{S}{K}\right) + rt \right| \frac{2}{t}}$$

- t : tempo para a execução do contrato de opção.

De posse desses cálculos é possível obter o seguinte conjunto de dados

$$(\sigma_i, c_i, K, S_i, r, t_i)$$

com os quais Dumas notou que poderia construir um modelo linear polinomial para estimar a volatilidade implícita com alguma precisão para pequenas variações em torno dos valores obtidos no mercado:

$$\sigma_{i+1} = g(K, S_i, r, t_i)$$

Mais especificamente,

$$\sigma_n = \beta_0 + \beta_1 K + \beta_2 K^2 + \beta_3 t + \beta_4 t^2 + \beta_5 t K$$

é uma equação simples, fácil de se obter e que ainda estima a volatilidade implícita para ser utilizada no MBS, oferecendo uma previsão do preço da opção. Mais importante ainda, o modelo proposto por Dumas tem como consequência um Δ bastante confiável.

Algumas críticas ao modelo de Dumas

Dumas tomou muito cuidado ao utilizar apenas parte dos parâmetros presentes no MBS porque não queria elaborar um modelo que pudesse envolver correlações espúrias. Além disso, também não utilizou nenhuma informação de cunho fundamentalista ou

proveniente das análises gráficas – tais como medias móveis e osciladores, que são bem conhecidas pelos analistas do setor financeiro.

Outro ponto importante é que Dumas recorreu aos modelos lineares, comuns à época do artigo. Hoje os modelos lineares generalizados (GLM) produzem resultados mais eficientes e modelos mais eficiente produzem um Δ mais confiável: assim, fortalecem a tese de uma inferência bayesiana aplicada ao MBS como um fator de correção.

Portanto serão abordados os seguintes temas que constituem pequenas críticas ao modelo desenvolvido por Dumas:

- Razões para o GLM
- Razões do Mercado
- Correção Bayesiana

Um GLM para explicar a Volatilidade Implícita

Quando Dumas fez sua regressão polinomial para estimar a variância implícita e calcular o prêmio justo de um derivativo, também elegeu automaticamente o modelo Normal com todas as suas implicações teóricas. É importante notar que, segundo PAULA (2010), a função de variância da curva Normal é constante, isto é,

$$V(\mu) = 1$$

e as consequências dessa condição são importantes porque a experiência oriunda do mundo real mostra-nos a impossibilidade dessa suposição.

Analistas financeiros, com conhecimento e experiência no mercado de capitais, sabem que fatos positivos afetam os preços dos ativos e dos derivativos de forma diferente dos fatos negativos. Sabem que a duração do efeito oriundo de um fato negativo é mais longo que o efeito de um fato positivo. Por essa razão a heterocedasticidade da variância dos erros afeta as médias das observações e deve ser considerada já no momento da modelagem. Esse comportamento modifica a variância do fenômeno estudado e é pouco provável que uma função de variância constante seja suficiente para explicá-lo. Dessa forma é interessante utilizar outras distribuições de probabilidade, que possam representar melhor variância dos erros. É o caso dos Modelos Lineares Generalizados (GLM).

Embora o GLM ofereça diversas distribuições de probabilidade, duas são especialmente importantes: Gamma e Normal Inversa. A distribuição Gamma tem a seguinte função de variância:

$$V(\mu) = \mu^2$$

que apresenta possibilidades bem mais interessantes que as da distribuição Normal. Todavia a Distribuição Normal Inversa tem uma relação cúbica entre a média e a variância,

$$V(\mu) = \mu^3$$

permitindo que o modelo explique a heterocedasticidade de modo mais convincente, talvez mais coerente com os fenômenos (positivos ou negativos) oriundos do mercado de capitais.

Além dessas questões pertinentes à função de variância, há que se considerar, também, o cuidado que Dumas tomou para que sua regressão não fosse estruturada a partir de covariáveis quaisquer e se tornasse uma relação espúria. Portanto aqui cabem algumas recomendações importantes que podem auxiliar na construção de um modelo mais robusto. Analistas de mercado sabem que:

- o efeito dos fatos positivos e dos fatos negativos agem temporalmente de modo diferente, o quê sugere a existência de uma estrutura autoregressiva;
- existe uma variedade de indicadores e de osciladores que são amplamente utilizados na análise de tendência, risco e variação;
- a análise de padrões gráficos é um instrumento de uso habitual e traduz comportamentos conhecidos, até certo ponto, confiáveis;
- indicadores e índices fundamentalistas são importantes na escolha do ativo, mas não possuem a velocidade necessária para explicar a volatilidade dos respectivos derivativos.

Enfim, o modelo de Dumas deve continuar mantendo sua estrutura polinomial mas pode ser acrescido de algumas das covariáveis sugeridas anteriormente:

- $o_1 = S_{t-1}$;
- $o_2 = K$;
- $o_3 = C_{t-1}$;

- $o_4 = t$.

Ainda pode-se acrescentar, a este conjunto de covariáveis, as relações para se montar a mesma estrutura polinomial adotada por Dumas, só que mais ampla:

- $p_1 = S_{t-1} \times K$
- $p_2 = S_{t-1} \times c_{t-1}$
- $p_3 = S_{t-1} \times t$
- $p_4 = K \times c_{t-1}$
- $p_5 = K \times t$
- $p_6 = c_{t-1} \times t$

e

- $q_1 = S_{t-1}^2$
- $q_2 = K^2$
- $q_3 = c_{t-1}^2$
- $q_4 = t^2$

A estas covariáveis é interessante incluir alguns indicadores que ajudam na composição de indicadores da análise gráfica – aqui denominados de ruídos:

- $r_1 = \log(\text{MedDr}/\text{MedAt})$
- $r_2 = \log(\text{QttDr}/\text{QttAt})$

onde,

- MedAt: média do ativo no momento t ;
- MedDr: média do derivativo no momento t ;
- QttAt: quantidade de ativos negociados no momento t ;
- QttDr: quantidade de derivativos negociados no momento t .

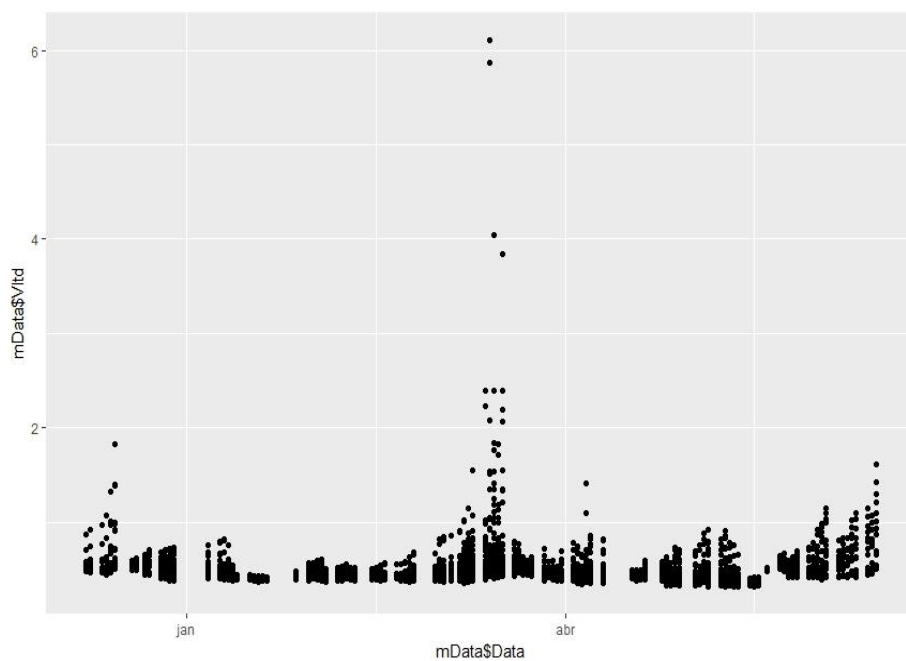
Tomando-se, enfim, uma ligação identidade, o novo modelo poderia ser reescrito como:

$$\sigma_{t+1} = \sum_{i=1}^6 \beta_{ip_i} + \sum_{i=1}^4 \beta_{io_i} + \sum_{i=1}^4 \beta_{iq_i} + \sum_{i=1}^2 \beta_{ir_i}$$

sendo que o GLM ainda permite alguns outros refinamentos, como, por exemplo, a utilização das ligações inversa e logarítmica.

Um aspecto interessante quando utilizamos modelos lineares no lugar de séries temporais é a possibilidade de estimar a volatilidade implícita e explicá-la através do conjunto de covariáveis. Durante o tempo da escrita deste artigo foram coletados dados de ativos com alta liquidez no Bovespa – VALE5, PETR4, ITUB4 e BBAS3. Também foram realizadas mais de 51 regressões. Das 18 covariáveis utilizadas durante a modelagem, somente 5 - p_1 , p_2 , p_4 , q_3 e q_4 – foram significativas em todos os modelos ajustados. Esse o conjunto de covariáveis no modelo é diferente quando cada ativo é estudado separadamente, sendo possível supor que cada ativo, ou grupo de ativos, tenham uma lei de formação própria. Apenas para ilustração, as próximas duas tabelas exibem alguns resultados importantes. Primeiro, o comportamento da volatilidade do ativo PETR4 no período estudado:

Figura 1: Volatilidade Implícita da PETR4 em 2017



e, em segundo lugar, os resultados obtidos com o MGL aplicado para 3 meses de dados coletados do mesmo ativo:

Tabela 1: Estimativa da Volatilidade Implícita com o modelo proposto

Option	K	c_t	t	σ_t	Call BS	Δ
PETRH11	11.00	2.33	15	0.342	2.36	0.991
PETRH91	11.50	1.86	15	0.341	1.88	0.968
PETRH46	11.75	1.63	15	0.339	1.64	0.946
PETRH57	12.00	1.41	15	0.339	1.41	0.911
PETRH42	12.50	0.96	15	0.323	0.98	0.815
PETRH13	13.00	0.59	15	0.318	0.62	0.657
PETRH48	13.25	0.44	16	0.306	0.47	0.565
PETRH43	13.50	0.33	15	0.321	0.36	0.468
PETRH73	13.75	0.23	16	0.307	0.26	0.376
PETRH14	14.00	0.16	15	0.320	0.18	0.292
PETRH68	14.25	0.12	15	0.328	0.13	0.226
PETRH45	14.50	0.08	16	0.323	0.10	0.172
PETRH65	15.00	0.05	16	0.342	0.05	0.099
PETRH75	15.25	0.02	16	0.339	0.03	0.068

na qual pode-se observar a proximidade do ajuste entre o prêmio pago pelo mercado (c_t) e o prêmio justo, calculado com o MBS (CallBS). Após a observação desses resultados preliminares deve-se notar que o mercado utiliza o MBS apenas para avaliar o preço de uma opção. Mas a Volatilidade Implícita sendo bem modelada como proposto, apresenta um Δ – que é a probabilidade da opção ser executada – que passa a ter papel fundamental em todas as estratégias de investimento.

SOBRE A INFERÊNCIA BAYESIANA

Uma Estratégia Bayesiana

Uma pergunta intrigante que está sempre presente no meio financeiro é: qual a melhor estratégia? Embora quase todo investidor garanta operar uma estratégia de sucesso; não existe, e nunca existirá, uma resposta definitiva para essa questão. Entretanto, quando se faz operações de hedge, uma boa estratégia parece ser o lançamento de opções com um strike que pague um prêmio alto, geralmente associado a uma grande probabilidade de exercício, mas que também possua uma grande probabilidade de execução no dinheiro. Ou seja, a estratégia é simples e pode ser resumida como maximizar o prêmio no lançamento para, na pior hipótese, ser exercido no dinheiro no final do contrato.

Como já foi comentado, o modelo proposto estima a volatilidade implícita do derivativo com bastante precisão e esse fato permite algumas suposições importantes no âmbito do mercado financeiro. A derivada do prêmio estimado em relação ao preço do derivativo, segundo Wilmott (2006) e Hull (2016), é:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = \int_{-\infty}^{\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

e oferece a probabilidade de exercício do derivativo – Δ . Essa probabilidade é interessante pois trata-se de uma probabilidade a priori; uma informação que o investidor possui antes do vencimento do contrato de opções. Deve-se notar que, se

$$\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \sim 0$$

o exercício da opção será no dinheiro, pois nesse caso S e K devem possuir valores muito próximos. Portanto pode-se afirmar, a menos de um pequeno erro,

$$error = \frac{(r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

que se o preço do derivativo for igual ao preço de execução do strike avaliado, o $\ln(S/K)$ será igual a zero, e a probabilidade de exercício no dinheiro pode estimada através de uma marcação bastante óbvia, equivalente à probabilidade avaliada no quartil Q_{50} da fdp descrita pela derivada que origina Δ .

De posse dessa probabilidade a priori é possível construir um experimento para corroborar empiricamente essa informação, combiná-las e oferecer uma nova perspectiva oriunda do mercado. Essa é, enfim, a tônica da Inferência Bayesiana.

Construção da Distribuição Preditiva

Através da Inferência Bayesiana é possível construir uma distribuição a posteriori, composta por uma combinação probabilística que mistura informações fruto de um conhecimento prévio – a distribuição a priori -, com informações empíricas colhidas no mercado, no caso a verossimilhança. Define-se:

Θ : variável aleatória que representa a probabilidade de exercício

e

$X|\theta$: uma amostra aleatória obtida de uma população cuja probabilidade de exercício é Θ

Nesse contexto a distribuição a posteriori será proporcional ao produto da verossimilhança pela priori, ou simplesmente:

$$\pi(\theta|x) \propto l(\theta;x) \cdot h(\theta)$$

Deve-se esclarecer que diversas distribuições podem ser utilizadas para essa construção, mas a distribuição de probabilidade mais indicada para representar as informações em questão seria a distribuição Beta(a,b), bem conhecida e bem estudada. Todavia, devido a problemas numéricos ou topológicos, a distribuição Beta(.) mostrou-se inviável para algumas amostras obtidas durante o experimento; mais especificamente, mostrou-se inviável para tratar a formação dos preços de derivativos para alguns dos ativos avaliados. Deve-se, então, abandonar a distribuição Beta(.) e pensar-se na distribuição Normal(.) como solução para o impasse. Assumindo que ambas as variáveis aleatórias - θ e $X|\theta$ - são distribuídas normalmente, Ehlers (2011) demonstra que:

$$\text{Verossimilhança: } X|\theta \sim N(\theta, \sigma_i)$$

$$\text{Priori: } \theta \sim N(\mu_0, \tau_0)$$

$$\text{Posteriori: } \theta|X \sim N(\mu_1, \tau(\sigma_i))$$

Ou seja, sendo a variância σ conhecida na verossimilhança, a distribuição posteriori seria uma Distribuição Normal cuja uma variância τ é função de σ_i . A relação entre variância e volatilidade também é conhecida, sendo a variância uma composição temporal da volatilidade e assim será possível construir uma distribuição posteriori para cada contrato. Isto é, construir uma família de distribuições preditivas a partir da volatilidade do derivativo de cada ativo avaliado.

Tal abordagem, embora muito útil e interessante, também se mostrou indevida. O problema ocorre quando o tamanho da amostra aumenta. Nesse caso a família de distribuições normais parecer convergir, talvez devido ao Teorema do Limite Central, para uma única distribuição preditiva. A volatilidade deixa de ser a única representante da probabilidade de execução e Δ passa a ter papel na distribuição preditiva.

A utilização da volatilidade e de Δ , concomitantemente, utiliza a mesma amostra mais de uma vez e pode induzir a um erro indesejável. A solução passa por abandonar a ideia de famílias de posteriores e distribuições conjugadas para trabalhar diretamente com a probabilidade de exercício, simulando numericamente a distribuição preditiva.

Várias distribuições de probabilidade podem ser utilizadas, mas a fdp de Gompertz é particularmente interessante por tratar curvas de sobrevivência e informações atuariais. Um paralelo filosófico pode ser facilmente elaborado entre o tempo de “vida”

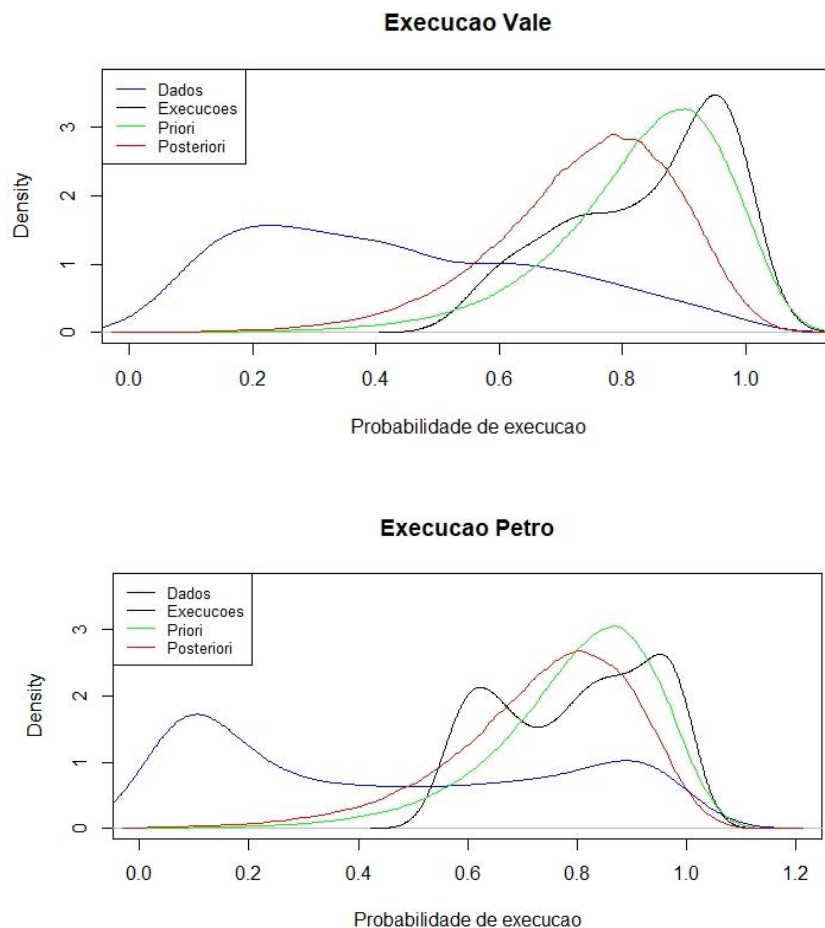
de uma determinada opção e a execução, ou não, do respectivo contrato. Então, define-se:

Verossimilhança: $X|\theta \sim \text{Gompertz}(a, b)$

Priori: $\theta \sim \text{Gompertz}(c, d)$

Posteriori: $\theta|X \sim \text{desconhecida}$

onde a distribuição a posteriori não tem sua primitiva definida e deverá ser simulada numericamente utilizando-se o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov - MCMC. Essa simulação pode ser executada com métodos do pacote mcmcPack existente para o R e alguns resultados podem ser observados a seguir:



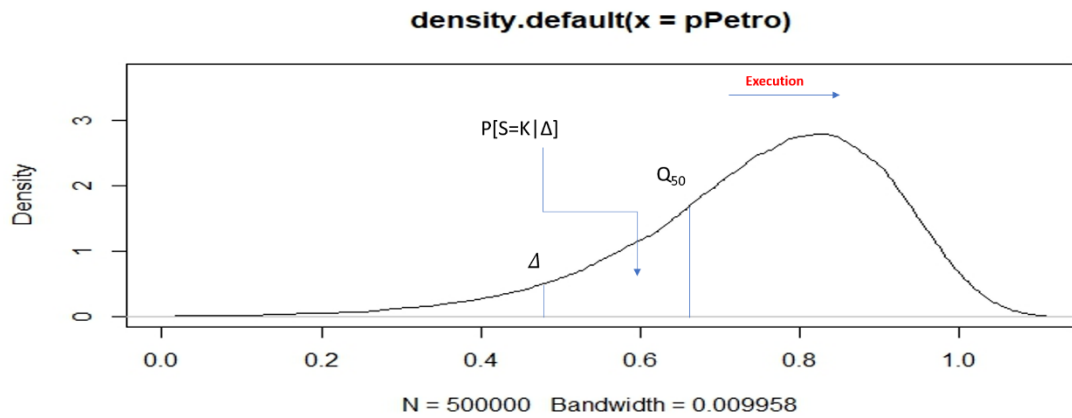
A integração numérica, através da simulações é simples e intuitiva, bastando calcular a probabilidade de execução no dinheiro condicionada por Δ . Supondo $\Delta < Q_{50}$, tem-se (EHLERS, 2011):

$$P[S=K|\Delta] = \int_{\Delta}^{Q_{50}} p(\theta|x) d\theta = E_{\theta|x}[\theta < Q_{50}] - E_{\theta|x}[\theta < \Delta]$$

e a probabilidade de execução no dinheiro também pode ser calculada diretamente com as informações simuladas pela distribuição a posteriori. Ou seja:

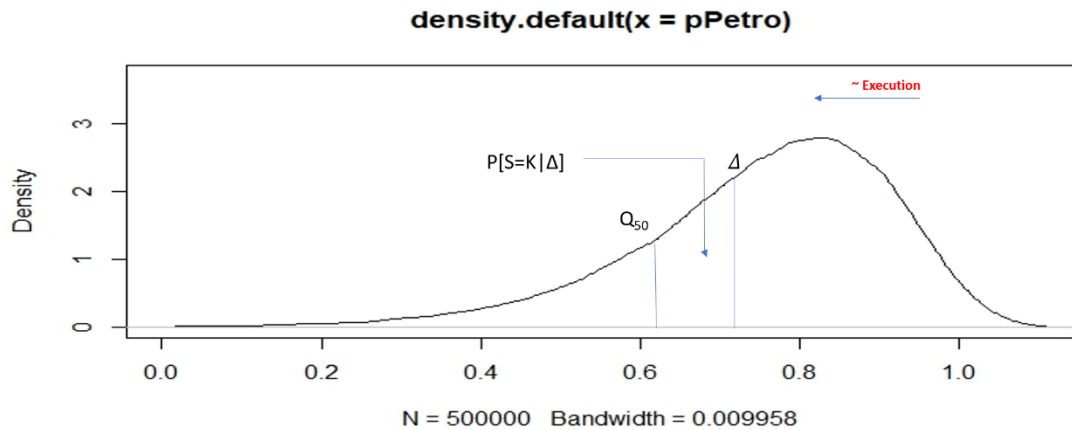
$$P[S=K] = P[S=K|\Delta] \cdot P[\Delta] = P[S=K|\Delta] \cdot E_{\theta|x}[\theta < \Delta]$$

Para a situação inversa, quando $\Delta > Q_{50}$, o cálculo da probabilidade é similar devendo-se considerar, entretanto, que a execução no dinheiro ocorre na direção oposta conforme pode ser observado na figura abaixo:



Aplicando-se um raciocínio análogo, a ideia remete ao pensamento de que o contrato retorne à condição de execução no dinheiro, isto é:

$$P[S=K] = P[S=K|\Delta] \cdot P[\Delta] = P[S=K|\Delta] \cdot (1 - E_{\theta|x}[\theta < \Delta])$$



Utilizando as probabilidades definidas anteriormente, tem-se o seguinte resultado para as ações do Banco do Brasil:

	Opção	Execução	Prêmio	Dias Úteis	VLTD	Preço Call	Δ	$P[S=K \Delta]$	$P[S=K]$
	BBASK5	35.57	1.98	30	0.323	2.02	0.60	0.53	0.32
	BBASK6	36.57	1.43	30	0.314	1.47	0.50	0.65	0.33
	BBASK7	37.57	0.97	30	0.296	0.98	0.40	0.70	0.28
	BBASK14	39.82	0.4	30	0.287	0.37	0.19	0.71	0.14
	BBASJ33	33.07	3.15	7	0.409	3.14	0.91	0.27	0.03
	BBASJ93	33.57	2.83	7	0.450	2.76	0.84	0.20	0.03
	BBASJ34	34.07	2.21	7	0.349	2.21	0.85	0.21	0.03
	BBASJ94	34.57	1.73	7	0.313	1.75	0.81	0.10	0.02
	BBASJ5	35.57	1.04	7	0.300	1.02	0.63	0.47	0.30
	BBASJ36	36.07	0.66	7	0.273	0.68	0.52	0.64	0.33
	BBASJ6	36.57	0.45	7	0.276	0.46	0.40	0.70	0.28

CONCLUSÃO

Curioso notar que a inclusão de informações, na forma de covariáveis, no modelo proposto por Dumas, aumenta a entropia da volatilidade. Todavia é esse mesmo aumento que permite a construção de um modelo mais robusto, tendo-se um controle mais eficiente do fenômeno em questão. Isso pode ser visto pela precisão encontrada na previsão dos prêmios estimados pelo MBL.

Parte dessa precisão pode ser, ainda, avaliada pela construção da distribuição preditiva. A Inferência Bayesiana permite relacionar dados históricos com informações empíricas mais recentes e oferece não só uma correção para a probabilidade de exercício, mas o cálculo de probabilidades desconhecidas até então. No caso:

$$P[S=K]$$

e

$$P[S=K|\Delta]$$

Essas correções criam condições para a elaboração de estratégias com um novo patamar de confiabilidade e distanciam as reações emocionais das operações que utilizam as técnicas propostas neste artigo.

Apenas como uma última sugestão, é importante a execução de uma análise de Componentes Principais, ou similar, para avaliar as preocupação de Dumas com a utilização de covariáveis espúrias. Uma vantagem inerente, ao se determinar algumas dimensões do modelo de regressão, reside no fato de permitir, em tese, o acompanhamento de variáveis macroeconômicas e melhorar a precisão do modelo.

Referências

1. ASSAF NETO, A. (2009). Finanças corporativas e valor. 4 ed. São Paulo: Atlas.
2. AZEVEDO, H. (2010). Investimentos no mercado de opções sobre ações no Brasil: teoria e prática. Rio de Janeiro: Elsevier.
3. BERKOWITZ, J. (2010). On Justifications for the ad hoc Black-Scholes Method of Option Pricing, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 14: No. 1, Article 4.
4. BLACK, F.; Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3): 637-654.
5. BLACK, F. (1976). Studies of Stock Price Volatility Changes. *Proceedings of the Meetings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association*, pp. 177-181.
6. BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, vol. 31, issue 3, pages 307-327.
7. COSTA, C. L. (1998). Opções: operando a volatilidade. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros.
8. COX, J.; RUBINSTEIN, M. (1985). *Options Markets*, Prentice-Hall, New Jersey.
9. DUMAS, B.; FLEMING, J.; WHALEY, R. (1998). Implied Volatility Functions: Empirical Tests, *Journal of Finance*, 53, 2059-2106.
10. EHLERS, R.S. Introdução à Inferência Bayesiana. Paraná: Departamento de Estatística, 2005. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/~ehlers/bayes>
11. ENGLE, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50:987-1008.
12. FELLER W. (1970). *An introduction to Probability Theory and its Applications*. Princeton University. Volume II.
13. FERREIRA, L. (2009). Mercado de opções: a estratégia vencedora. São Paulo: Saraiva.
14. FRIEDMAN, M. (1953). *The Methodology of Positive Economics*. Essays in Positive Economics. Chicago: University of Chicago Press.

15. HAUG, E. (2006). The Complete Guide to Option Pricing Formulas, 2nd edition. New York: McGraw-Hill
16. HULL, J. (2016). Options, Futures, and Other Derivatives. 9th Ed. Pearson Prentice-Hall.
17. LEMGRUBER, E.F. (1995). Avaliação de Contratos de Opções. Ed. BM&F.
18. LIMA, I.; LIMA, G.; PIMENTEL, R. Org. (2007). Curso de mercado financeiro: tópicos especiais. 1 ed. 2. reimpr. São Paulo: Atlas.
19. MANASTER, S.; KOEHLER, G. (1982). The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model: A Note. Journal of Finance, 37, No. 1, pp. 227-230.
20. MARQUES, F.T. (2008). Estimação do Value at Risk via enfoque Bayesiano. 58f. Dissertação (mestrado). São Paulo. UFSCAR.
21. MERTON, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1): 141-183.
22. MORETTIN, P. (2008). Econometria Financeira - um curso em séries temporais financeiras. São Paulo: Editora Edgard Blucher.
23. NATENBERG, S. (1994). Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques. McGraw-Hill; Updated edition.
24. NELSON, D. (1991). Conditional heteroscedasticity in asset returns. Econometrica, v. 59, n.2, p. 347-370.
25. PAULA, G.A. (2010). Modelos de Regressão com apoio computacional. USP. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~giapaula/mlgs.html>
26. R DEVELOPMENT CORE TEAM. (2011). A Language and Environment. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria.
27. STEWART, I. (2015). 17 Equations That Changed The World. Zahar.
28. Wilmott, P. (2006). Quantitative Finance. Ed. John Wiley & Sons.